Bemerkung zur Divergenz der Fourierreihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Die n-te Partialsumme der Fourierreihe einer Funktion $f(x)\in L(0, 2\pi)$ setzen wir in der Form $s_n = s_n' + s_n''$ an, mit

$$s_n'(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \quad s_n''(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x-t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge mit $\lambda_n \to \infty$ und $\lambda_n = o\,(\log n)$. Dann gibt es eine stetige, nach 2π periodische Funktion $f(x)$ derart, daß*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}|s_n'(f; x)| > 0 \quad \textit{und} \quad \varlimsup_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}|s_n''(f; x)| > 0 \tag{1}$$

fast überall bestehen.

Beweis. Nach dem Satz von L. CARLESON [1]) konvergiert die Folge $\{s_n(f; x)\}$ im Falle $f(x)\in L^2(0, 2\pi)$ fast überall; es ist also nur die erste der Ungleichungen (1) für eine stetige, nach 2π periodische Funktion $f(x)$ zu beweisen. Weiterhin, nach dem Riemann—Lebesgueschen Lemma gilt

$$s_n'(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x+t)\frac{\sin nt}{t}\,dt + o(1) = s_n^*(f; x) + o(1)$$

für jedes x, darum ist es genügend eine stetige, nach 2π periodische Funktion $f(x)$ anzugeben, für die

$$\varlimsup_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}|s_n^*(f; x)| > 0 \tag{2}$$

fast überall gilt.

Aus der Relation

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \quad (\delta > 0)\ ^{2)} \tag{3}$$

---

[1]) L. CARLESON, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.*, **166** (1966), 135—157.

[2]) Siehe z. B. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series* (New York, 1952), 179—180.

und aus dem Riemann—Lebesgueschen Lemma erhalten wir:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\pi \frac{\cos nt}{t}\sin\alpha t\,dt=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin nt}{t}\sin\alpha t\,dt=0\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Auf Grund dieser Relationen und der Annahme $\lambda_n=o(\log n)$ können wir eine Indexfolge $(1\leqq)\,n(1)<\ldots<n(k)<\ldots$ angeben, für die

$$\left|\int_0^\pi \frac{\cos n(k)t}{t}\sin n(l)t\,dt\right|\leqq 2,\quad \left|\int_0^\pi \frac{\sin n(k)t}{t}\sin n(l)t\,dt\right|\leqq 2\qquad (k\neq l), \tag{4}$$

$$\frac{\lambda_{n(k)}}{\log n(k)}\leqq\frac{1}{k^2}\qquad (k=1,2,\ldots), \tag{5}$$

$$n(k)|n(l)\qquad (k<l) \tag{6}$$

gelten. Wir setzen:

$$f(x)=\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin n(k)x}{k^2}.$$

Offensichtlich ist $f(x)$ eine stetige, nach 2π periodische Funktion und gilt

$$s^*_{n(k_0)}(f;x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}\int_0^\pi\frac{\sin n(k)(x+t)}{t}\sin n(k_0)t\,dt.$$

Durch eine einfache Rechnung ergibt sich

$$s^*_{n(k_0)}(f;x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\sin n(k)x\int_0^\pi\frac{\cos n(k)t}{t}\sin n(k_0)t\,dt+\cos n(k)x\int_0^\pi\frac{\sin n(k)t}{t}\sin n(k_0)t\,dt\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi k_0^2}\left(\frac{\sin n(k_0)x}{2}\int_0^\pi\frac{\sin 2n(k_0)t}{t}\,dt+\cos n(k_0)x\int_0^\pi\frac{\sin^2 n(k_0)t}{t}\,dt\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=k_0+1}^\infty\frac{1}{k^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\sin n(k)x\int_0^\pi\frac{\cos n(k)t}{t}\sin n(k_0)t\,dt+\cos n(k)x\int_0^\pi\frac{\sin n(k)t}{t}\sin n(k_0)t\,dt\right).$$

Daraus, auf Grund von (3) und (4) folgt

$$|s^*_{n(k_0)}(f;x)|\geqq\frac{1}{\pi k_0^2}|\cos n(k_0)x|\int_0^\pi\frac{\sin^2 n(k_0)t}{t}\,dt-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}. \tag{7}$$

Da

$$\int_0^\pi\frac{\sin^2 n(k_0)t}{t}\,dt\geqq a\log n(k_0)$$

mit einer positiven absoluten Konstante a gilt, erhalten wir aus (5) und (7)

$$\lambda_{n(k_0)}^{-1} |s_{n(k_0)}^*(f; x)| \geqq b \qquad \left(x \in \left(l\frac{\pi}{n(k_0)} - \frac{\pi}{2n(k_0)}, l\frac{\pi}{n(k_0)} + \frac{\pi}{2n(k_0)}\right); 0 \leqq l < 2n(k_0)\right)$$

für genügend großes k_0, wobei b eine positive, absolute Konstante bezeichnet. Es sei

$$E(k) = \bigcup_{l=0}^{2n(k)-1} \left(l\frac{\pi}{n(k)} - \frac{\pi}{2n(k)}, l\frac{\pi}{n(k)} + \frac{\pi}{2n(k)}\right).$$

Da $\operatorname{mes}(E(k)) = \pi$ $(k = 1, 2, \dots)$ ist, und die Mengen $E(k)$ wegen (6) stochastisch unabhängig sind, ergibt sich durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas $\operatorname{mes}(\overline{\lim}_{k\to\infty} E(k)) = 2\pi$. Also gilt

$$\lambda_{n(k)}^{-1} |s_{n(k)}^*(f; x)| > b$$

für unendlich viele k fast überall.

(Eingegangen am 25. Januar 1967)